Л 11. Неопределенный интеграл. Таблица основных интегралов. Методы интегрирования.

Определение. Первообразной для функции $y = f(x)$, определенной в интервале (a,b), называется такая функция $y = F(x)$, производная которой совпадает с $f(x)$ в интервале (a,b), т.е.

$$F'(x) \equiv f(x) \qquad \forall x \in (a,b).$$

Другими словами, нахождение первообразной для данной функции есть задача обратная к задаче нахождения ее производной.

Пример. Первообразной для функции $y = x^2$, на $(-\infty,+\infty)$ является функция $y = \dfrac{x^3}{3}$, т.к. $\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$. Заметим, что это не единственная первообразная у данной функции. Функции $y = \dfrac{x^3}{3} + 1$, $y = \dfrac{x^3}{3} + 2$, а также любая функция $y = \dfrac{x^3}{3} + C$ (C-число), являются первообразными для функции $y = x^2$.

Теорема 1. Если $x_0 = a$ и $x_n = b$ две первообразные для функции $y = f(x)$ на (a,b), то найдется такое число C, что $F_1(x) \equiv F_2(x) + C$.

Определение. Множество всех первообразных для функции $y = f(x)$ на интервале (a,b) называется неопределенным интегралом этой функции.

Он обозначается символами $\int f(x)dx$, где $\int$ - знак интеграла, dx - дифференциал переменной x. Если $y = F(x)$ какая либо первообразная функции $y = f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad C \in R$$

В дальнейшем для краткости мы не будем упоминать интервал (a,b) определения первообразной.

Неопределенные интегралы являются основным инструментом для нахождения определенных интегралов, имеющих широкие применения практически во всех приложениях математики. В этой главе мы рассмотрим методы нахождения различных неопределенных интегралов. Сразу следует заметить, что в отличие от производных, нет алгоритма нахождения любого неопределенного интеграла, а некоторые интегралы вообще нельзя выразить с помощью элементарных функций.

Свойства неопределенных интегралов

Мы будем предполагать, что все записанные интегралы существуют.

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; $\quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

2) $\int f'(x)dx = f(x) + C$; $\int d f(x) = f(x) + C$.

Эти свойства непосредственно следуют из определения неопределенного интеграла.

3) Если a - число, то $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.

4) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Для доказательства этих утверждений продифференцируйте левую и правую части каждого равенства.

5) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, a, b - числа, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Для практического интегрирования прежде всего необходимо знать наизусть следующую таблицу.

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{a+1} + C \quad (n \neq -1)$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$.

В частности, $\int e^x dx = e^x + C$.

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$.
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$.
8. $\int \mathrm{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$.
9. $\int \mathrm{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$.
10. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.
11. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.
12. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$.
13. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C \quad (a > 0)$.
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C \quad (a > 0)$.
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$.
16. $\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C$.
17. $\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C$.
18. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.
19. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + C$.

Проверка любого интеграла из этой таблицы состоит в нахождении производной правой части.

Например. $\int \cos x dx = \sin x + C$, т.к. $(\sin x)' = \cos x$

Пример. $\int \sin(2x+3)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C$.

1. Замена переменной в неопределенном интеграле

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна, а функция $x = x(t)$ непрерывно дифференцируема, то $\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt$.

Это равенство можно также записать в виде интеграла $\int f(x)dx = \int f(x(t))dx(t)$

Пример. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+1}$, с помощью замены переменной $2x+1 = t^2$, т.е. $x = \frac{t^2-1}{2}$. При этом используется следующая запись

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+1} = \left| x = \frac{t^2-1}{2}, \quad dx = \left(\frac{t^2-1}{2}\right)' dt = tdt \right| = \int \frac{tdt}{t+1} =$$

$$= \int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = t - \ln|t+1| + C = \left|t = \sqrt{2x+1}\right| = \sqrt{2x+1} - \ln\left|\sqrt{2x+1}\right| + C$$

После интегрирования необходимо вернуться к исходной переменной x.

2. Метод подведения под знак дифференциала. Этот метод является наиболее часто используемым видом замены переменной, при котором один из сомножителей подынтегральной функции заносится под знак d и объявляется новой переменной. Напомним, что подвести функцию $u'(x)$ под знак дифференциала dx- это значит записать после знака d первообразную функции, т.е.

$$u'(x)dx = du(x).$$

Следствие. Пусть функции $y = f(u)$ и $y = u'(x)$ непрерывны, тогда

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du.$$

Эта формула фактически повторяет формулу (1), переписанную справа налево и в других обозначениях.

Пример.

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx^2 = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \left|x^2+1=u\right| = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

3. Метод интегрирования по частям

Теорема. Пусть функции $y = u(x)$ и $y = v(x)$ непрерывно дифференцируемы, тогда

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Последнюю формулу часто записывают в сокращенном виде

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

где сомножители v' и u' внесены под знаки дифференциала.

Пример.

$$\int arctgx dx = \left| \begin{array}{l} arctgx = u, v = x, \\ du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx \end{array} \right| = xarctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx = xarctgx - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

(см. предыдущий пример).

Пример.

$$\int x\cos x dx = \int x d\sin x = \left|u = x, du = dx, v = \sin x\right| = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$$